2020年硕士研究生入学考试大纲

考试科目名称：实变函数论与泛函分析 考试时间：120分钟，满分：100分

1. 考试要求：

理解集合与映射的基本概念及性质；掌握Lebesque测度的基础知识；了解可测函数的概念、性质与构造。 理解Lebesque积分的建立过程及思想方法；理解Lebesque积分与Riemann积分的区别与联系。了解函数空间的定义及其完备性和可分性概念； 理解距离空间、赋范空间和巴拿赫空间的概念。掌握巴拿赫空间的基本性质、线性算子和线性泛函的基本知识；掌握开映射定理、闭图象定理、共鸣定理和哈恩-巴拿赫定理；理解对偶空间、自反空间和紧算子等概念。掌握希尔伯特空间的基本性质、希尔伯特空间正交化方法、投影定理及其应用。

1. **考试内容**：

**1. 集与点集：**

(1) 集及其运算，映射，对等与基数，可数集与不可数集距；

(2) 邻域，内点，聚点，导集，开集、闭集及其性质；

(3) 开集的构成区间，结构表示，Cantor三分集。

**2. Lebesque测度：**

(1) Lebesgue外测度的定义，Lebesgue外测度的性质；

(2) Lebesgue可测集的定义，可测的等价条件，Lebesgue可测集的性质；

(3) 可测集类，Borel集，不可测集。

**3. 可测函数：**

(1) 可测函数的定义及等价条件，简单函数，几乎处处的概念，可测函数的基本性质集；

(2) 集列的上限集、下限集，叶果洛夫定理，近一致收敛，依测度收敛，依测度基本列；

(3) 鲁津定理及其证明，鲁津定理的应用。

**4. Lebesque积分：**

(1) Lebesgue积分的定义，简单函数的积分，Lebesgue积分的性质，积分的绝对连续性；

(2) Levi定理，Fatou定理，Lebesgue控制收敛定理，Lebesgue-Vitali定理；

(3) R积分与L积分的比较；

(4) Lebesgue积分的几何意义，乘积测度，截面定理，Fubini定理。

**5. 函数空间Lp：**

(1) 空间Lp的概念，赫尔得不等式，闵可夫斯基不等式，空间Lp的完备性与可分性。

**6. 距离空间：**

(1) 距离空间的定义及例，距离空间中的收敛及其性质；

(2) 几类特殊的点集，稠密性与可分性；同胚，等距；

(3) 完备距离空间；第一及第二类型的集；

(4) 准紧集，紧集，全有界集；紧集上的连续映射；

(5) 压缩映射，不动点定理及应用。

**7. 巴拿赫空间与希尔伯特空间：**

(1) 赋范线性空间，巴拿赫空间；商空间；

(2) 内积空间，极化恒等式，希尔伯特空间；

(3) 正交与正交分解，规范正交系；施密特正交化定理。

**8.** **巴拿赫空间上的有界线性算子：**

(1) 有界线性算子的概念与性质，线性算子空间，算子的乘法；

(2) 开映射定理，逆算子定理，闭图像定理；

(3) 共鸣定理，傅里叶级数的发散问题；

(4) 有界线性泛函的延拓，哈恩-巴拿赫定理；

(5) 对偶空间，自反空间，伴随算子；

(6) 有界线性算子谱的基本性质；紧算子，有限秩算子。

**9.** **希尔伯特空间上的有界线性算子：**

(1) 希尔伯特空间上的有界线性算子，对偶空间，伴随算子；

(2) 自伴算子，正算子，单调自伴算子列。

**三、参考书目**

1．《实变函数与泛函分析基础》(第三版)，程其襄、张奠宙、魏国强等，高等教育出版社，2010，“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材；

2．《实变函数与泛函分析概要》(第四版)第二册，王声望、郑维行，高等教育出版社，2010，普通高等教育“十一五”国家级规划教材；

3．《泛函分析》(第二版)，刘炳初，科学出版社，2013，普通高等教育“十一五”国家级规划教材“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。